

- 1) Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos de  $m$  y  $n$  elementos respectivamente.
  - a) Hallar el número de funciones  $f : A \rightarrow B$ .
  - b) Hallar el número de funciones inyectivas  $f : A \rightarrow B$ .
- 2) Sea  $X$  un conjunto finito con  $n$  elementos.  
 ¿Cuántos subconjuntos tiene  $X \times X$ ? ¿Cuántas funciones hay de  $X$  en  $X \times X$ ?
- 3) Para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ , con  $k \leq n$ , el número combinatorio  $\binom{n}{k}$  se define como el número de subconjuntos de  $k$  elementos en un conjunto  $X$  que tenga  $n$  elementos.  
 A partir de la definición, demuestra las siguientes propiedades de los números combinatorios:
  - a)  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  ;    b)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  ;    c)  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  ;    d)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  ,
 es decir, el conjunto  $X$  tiene en total  $2^n$  subconjuntos.
- 4) Utilizar la definición de los números combinatorios  $\binom{n}{k}$  para demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k .$$

Derivar  $k$  veces esa igualdad, y evaluarla en  $x = 0$  para demostrar que se tiene la siguiente expresión algebraica para los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

- 5) Utilizar el *principio de inclusión-exclusión* para responder:
  - (a) ¿Cuántos números naturales coprimos con 1000 hay entre 1 y 1000?
  - (b) ¿Cuántos números naturales coprimos con 360 hay entre 1 y 360?
- 6) En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y los han dejado en un paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria.
  - a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que ninguno se quede con el suyo?
  - b) Responder a la misma pregunta para el caso de  $n$  personas y  $n$  paraguas.
- 7) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$x \geq y$ $x, y \in \mathbb{R}$	$x < y$ $x, y \in \mathbb{R}$	$ x  \leq  y $ $x, y \in \mathbb{R}$	$A \subset B$ $A, B \in \mathcal{P}(X)$	$a \leq c \wedge b \leq d$ $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$	$a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$ $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$
-------------------------------------	----------------------------------	---	--	---	---

Ojo: por convenio, ' $\subset$ ' incluye el caso '='; si se escribe ' $\subseteq$ ', es para ayudar a recordarlo.

- 8) Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se define en  $X$  la siguiente relación:
 
$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$
 Demostrar que la relación  $\mathcal{R}$  es una relación de orden si y sólo si  $f$  es inyectiva.
- 9) Para la relación de orden dada en  $\mathbb{Z}^+$  por  $\boxed{n|m}$ , dar respuesta a las siguientes preguntas:
  - (a) ¿Tiene  $\mathbb{Z}^+$  un máximo y/o un mínimo para esta relación?
  - (b) ¿Qué subconjuntos de  $\mathbb{Z}^+$  tienen un máximo y cuáles un mínimo?
  - (c) Dado un intervalo  $A = \{k \in \mathbb{Z}^+ : n \leq k \leq m\}$ , ¿qué debe cumplir un  $k \in A$  para ser un elemento maximal de  $A$ ? ¿Y para ser minimal?
  - (d) ¿Cuáles son los minimales de  $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ ?
  - (e) ¿Qué proceso podríamos seguir para aislar los minimales de un intervalo dado?
- 10) Decimos que una relación de orden  $\mathcal{R}$  en un conjunto  $X$  es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío  $A \subset X$  tiene un mínimo, como sucede por ejemplo con el orden ' $\leq$ ' en  $\mathbb{N}$ .  
 Probar que también están **bien ordenados** por ' $\leq$ ' los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$  :
  - (a) La unión  $X \cup Y$  de dos subconjuntos  $X, Y \subset \mathbb{R}$ , si cada uno de ellos está bien ordenado.
  - (b\*) El conjunto  $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ , si  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , son dos sucesiones crecientes.

- 11) Hallar cuántas relaciones de orden se pueden definir en un conjunto  $X$  con sólo dos elementos, que no sean *isomorfas*, es decir, que no se transformen una en otra mediante una biyección de  $X$  en  $X$ . Repetir la tarea con un  $X$  de 3 y de 4 elementos. Usar *diagramas* para mostrar las respuestas.
- 12) Probar la afirmación siguiente (o dar un contraejemplo que la refute):  
*Si un conjunto ordenado  $A$  tiene un solo elemento minimal  $a$ , entonces  $a$  es el mínimo de  $A$ .*
- 13) ¿Es posible encontrar, entre algún par de los siguientes conjuntos ordenados, una biyección que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos? ¿Entre cuáles?
- $\mathbb{Z}$ , con el orden  $\leq$  habitual.
  - $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , con el orden dado por:  $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$  si y sólo si  $|a - c| \leq d - b$ .
  - $\mathbb{R}$ , con el orden  $\leq$  habitual.
  - El conjunto de los racionales de la forma  $1 \pm n/(n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con el orden  $\leq$  habitual.
  - El conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje  $X$ , ordenados por inclusión.
- 14) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden establecido, y llamando “palabras” a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.  
 Usando el signo ‘ $\leq$ ’ para el orden de las “letras”, dar una definición de cuándo la palabra ‘ $a_1a_2 \dots a_n$ ’ precede a la ‘ $b_1b_2 \dots b_m$ ’: decir qué deben cumplir sus letras para ello.  
 Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo. Pero ¿será eso cierto para cualquier conjunto infinito de palabras?  
 (\*) Probar que es cierto (y por lo tanto se trata de un *buen orden*), o dar un contraejemplo.
- 15) En  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  definimos la siguiente relación:  $x\mathcal{R}y$  si  $x$  e  $y$  tienen el mismo signo y  $|x| \leq |y|$ .
- Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.
  - Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo  $[-3, 2)$ .
- 16) Considera la función
- $$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
- $$(n, m) \longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m$$
- y las siguientes relaciones en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :
- $$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$
- $$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$
- Demostrar que  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?
  - Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto  $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq n + m \leq 4\}$  para cada una de la relaciones de orden  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ .
- 17) Sean  $m$  y  $n$  números naturales. Demuestra que si  $m$  y  $n$  son potencias de 3, entonces  $m + n$  no es nunca una potencia de 3.
- 18) Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.
- 19) Estudiar si la siguiente función es inyectiva y/o sobreyectiva.
- $$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
- $$A \longrightarrow f(A) = \{(n - 1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar})\}.$$
- ¿Quién es  $f^{-1}(\{\emptyset\})$ ?
- 20) Sean  $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow P = \{\text{primos}\}$  dos funciones definidas por
- $$f(n) = \text{el mayor primo que divide a } n, \quad \text{y} \quad g(n) = \text{el menor primo que divide a } n.$$
- Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.
  - ¿Quién es  $f^{-1}(\{3\})$ ? ¿Quién es  $g^{-1}(\{3\})$ ?